

Hacia un Nuevo Enfoque de Aprendizaje de Máquina Ontológico

J. A. Aviña Méndez

Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel y Henríquez,
Unidad Académica Zapopan, Ingeniería en Sistemas Computacionales, Jalisco, México.

jose.avina@zapopan.tecmm.edu.mx

Resumen— El presente artículo es resultado de un trabajo de investigación encaminado a la construcción de un Enfoque Ontológico para mejorar la etapa de Feature Engineering en tareas que subyacen en el ámbito del Aprendizaje de Máquina. En contraste con los actuales enfoques, en este artículo se propone el empleo de un lenguaje conceptual $\mathcal{L}$, el cual es un subconjunto de la Lógica Descriptiva *ALCN*. Ello permitirá explorar y orientar la implementación de servicios de razonamiento, decidibles, completos, correctos y tratables, para lenguajes conceptuales expresivos cuyos algoritmos de razonamiento suelen ser no polinomiales. En este artículo, se presentan como resultados la formalización del Lenguaje Conceptual $\mathcal{L}$, la construcción de un Calculus Tableaux para realizar servicios de consulta y razonamiento sobre Teorías Axiomáticas basadas en $\mathcal{L}$ y asimismo se presentan sus pruebas respectivas de completitud (i.e. completeness) y correctitud (i.e. soundness).

Palabras clave— lógicas descriptivas, lenguajes conceptuales, ontologías, aprendizaje de máquina, feature engineering.

I. INTRODUCCIÓN

Derivado de las características y propiedades que poseen las Lógicas Descriptivas (LD) [1, 3], también conocidas como Lenguajes Conceptuales, éstas han recobrado el interés de comunidades científicas en diversos ámbitos; particularmente en el ámbito del Aprendizaje de Máquina. Las LD se han consolidado como un enfoque que abona en la estandarización tanto del proceso de construcción de ontologías como de sus respectivos servicios de razonamiento (e.g., instance checking, subsumption, relation checking). Asimismo, se están aplicando actualmente en campos como la estandarización de la Web Semántica [4], la automatización del diagnóstico médico [5], la planeación de tareas y construcción de robots con capacidades de razonamiento [6] y en el análisis de interacciones químicas [7].

Particularmente, en el ámbito del Aprendizaje de Máquina, las ontologías -construidas a partir de lenguajes conceptuales- se están empleando para extender el actual enfoque -predominantemente probabilístico y numérico- del *Feature Engineering* hacia un enfoque semántico (i.e. ontológico) [8-9]. Asimismo, se están empleando para mejorar el desempeño en las tareas clásicas de aprendizaje como la regresión y clasificación [10-11]. El componente fundamental para el diseño e implementación de estos enfoques ontológicos, ha sido el Lenguaje Conceptual *EL* [12-13]. Ello obedece a una simple y sencilla razón, la

expresividad de este lenguaje asegura la construcción de servicios de razonamiento (i.e. algoritmos) tratables y decidibles [14]. El lenguaje, *EL*, consiste en un subconjunto de la LD *ALC* cuya expresividad es, ex professo, limitada con la intención de favorecer, precisamente, la construcción de servicios de razonamiento tratables y decidibles.

El presente artículo es resultado de un trabajo de investigación encaminado a la construcción de un Enfoque Ontológico para mejorar el proceso de Feature Engineering en el ámbito del Aprendizaje de Máquina. En contraste con los actuales enfoques, en este artículo se propone el empleo de un lenguaje conceptual $\mathcal{L}$, el cual es un subconjunto de la LD *ALCN*, la cual posee un conjunto de constructores de conceptos y relaciones con mayor expresividad que la LD *ALC*. Ello, pues, permitirá explorar la implementación de servicios de razonamiento, tratables y decidibles, para lenguajes conceptuales expresivos cuyos servicios de razonamiento suelen tener costos no polinomiales.

II. DEFINICIÓN DEL LENGUAJE CONCEPTUAL $\mathcal{L}$

Las LD pueden interpretarse como un conjunto de Lenguajes Conceptuales (LC) cuyos ingredientes básicos son constructores que denotan clases y relaciones entre clases [1, 15]. Las clases (o conceptos) representan un conjunto de individuos, mientras que los roles son utilizados para expresar tanto las relaciones entre conceptos como sus atributos. Los lenguajes conceptuales pueden expresar conocimiento taxonómico mediante la descripción de jerarquías de clases. A diferencia de los formalismos tales como marcos y redes semánticas, los lenguajes conceptuales tienen la ventaja de una semántica declarativa de estilo Tarsky [7].

Mediante el empleo de LC se posibilita la construcción de ontologías, las cuales están conformadas por dos componentes técnicamente denominados TBox y ABox que almacenan conocimiento intensional y extensional respectivamente. Asimismo, los LC se pueden equipar con varios servicios de razonamiento que se implementan a partir de un Calculus Tableaux o Procedimientos de Decisión que actúan sobre conocimientos intensionales y/o extensionales. Éstos, a su vez, poseen propiedades tales como decidibilidad, completitud y correctitud, cuyas tareas de formalización y estudio permiten orientar la construcción de servicios de razonamiento, precisamente, decidibles, tratables, completos y correctos [16].

Bajo la inteligencia de materializar -paulatinamente- un nuevo enfoque, de Aprendizaje de Máquina Ontológico, el componente sustantivo es precisamente un Lenguaje Conceptual, $\mathcal{L}$, que posibilite la construcción de ontologías (i.e. Teorías Axiomáticas), el cual se formalizará en la presente sección. El lenguaje, $\mathcal{L}$, consiste en un subconjunto del lenguaje conceptual *ALCN* [17]. En este contexto, en el lenguaje conceptual $\mathcal{L}$ subyacen una serie de ventajas atractivas ya que éste puede concebirse como:

- Un Lenguaje conceptual $\mathcal{L}_\Sigma$ para construir Teorías Axiomáticas $\Sigma(\mathcal{L})$.
- Un Lenguaje Lógico $\mathcal{L}_\phi$ para definir fórmulas lógicas $\phi(\mathcal{L})$ como consecuencias lógicas de una Teoría Axiomática $\Sigma_\phi(\mathcal{L})$.
- Un Lenguaje procedimental $\mathcal{L}_\varphi$ para construir y realizar consultas procedurales $\varphi(\mathcal{L})$ sobre una Teoría Axiomática $\Sigma_\varphi(\mathcal{L})$.

Se ha elegido definir y estudiar el lenguaje $\mathcal{L}$, porque está demostrado que dada la expresividad que posee *ALCN*, y algunas de sus extensiones, los algoritmos para inferir sobre teorías axiomáticas *ALCN* pueden resultar tanto no decidibles como intratables [18].

A. Definición del Lenguaje Conceptual $\mathcal{L}$

Sean C y R conjuntos de conceptos y roles respectivamente en $\mathcal{L}$, donde C es disjunto de R . Si $A_\mathcal{L}$ es un concepto atómico en $\mathcal{L}$, $C_\mathcal{L}$ y $D_\mathcal{L}$ representan conceptos no atómicos en $\mathcal{L}$ y $R_\mathcal{L}$ es un rol arbitrario en $\mathcal{L}$, donde $C_\mathcal{L} \in C$, $D_\mathcal{L} \in D$, $R_\mathcal{L} \in R$ y $n > 0$, entonces las siguientes expresiones son también conceptos:

$C, D \rightarrow$	
A	Concepto Atómico
T	<i>Top, Thing</i>
$\perp$	<i>Bottom</i>
$\neg A$	Negación
$\sqcap D$	Conjunción
$\sqcup D$	Disyunción
$\forall R.C$	Universal Restringido
$\exists R.T$	Cuantificador Existencial no restringido
$\exists R.C$	Cuantificador Existencial restringido
$\exists < nB$	Restricción Numérica (a lo menos)
$\exists > nB$	Restricción Numérica (a lo más)

B. Semántica del Lenguaje Conceptual $\mathcal{L}$

Una interpretación $\mathcal{I} = (\Delta^\mathcal{I}, \cdot^\mathcal{I})$ consiste en un conjunto $\Delta^\mathcal{I}$ (i.e. el dominio de $\mathcal{I}$) y una función $\cdot^\mathcal{I}$ (i.e. la función de interpretación de $\mathcal{I}$) que mapea cada individuo a a un elemento $a^\mathcal{I} \in \Delta^\mathcal{I}$, cada concepto a un subconjunto de $\Delta^\mathcal{I}$ y cada rol a un subconjunto de $\Delta^\mathcal{I} \times \Delta^\mathcal{I}$ tal que:

$$\begin{aligned}
 \top^\mathcal{I} &= \Delta^\mathcal{I} \\
 \perp^\mathcal{I} &= \emptyset \\
 (\neg A)^\mathcal{I} &= \Delta^\mathcal{I} \setminus A^\mathcal{I} \\
 (C \sqcap D)^\mathcal{I} &= C^\mathcal{I} \cap D^\mathcal{I} \\
 (\forall R.C)^\mathcal{I} &= \{a \in \Delta^\mathcal{I} \mid \forall b.(a, b) \in R^\mathcal{I} \rightarrow b \in C^\mathcal{I}\} \\
 (\exists R.T)^\mathcal{I} &= \{a \in \Delta^\mathcal{I} \mid \exists b.(a, b) \in R^\mathcal{I}\} \\
 (\exists R.C)^\mathcal{I} &= \{a \in \Delta^\mathcal{I} \mid \exists b.(a, b) \in R^\mathcal{I} \wedge b \in C^\mathcal{I}\} \\
 (\exists \leq nR)^\mathcal{I} &= \{a \in \Delta^\mathcal{I} \mid \#\{b.(a, b) \in R^\mathcal{I}\} \leq n\} \\
 (\exists \geq nR)^\mathcal{I} &= \{a \in \Delta^\mathcal{I} \mid \#\{b.(a, b) \in R^\mathcal{I}\} \geq n\}
 \end{aligned}$$

III. CALCULUS TABLEAU $\mathcal{CTL}$

Asumamos, pues, que existen los conjuntos: Variables, Individuos, Roles y Conceptos, tal que

$$\begin{aligned}
 \text{Variables} &= \{x_0, x_1, \dots\} \\
 \text{Individuos} &= \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \\
 \text{Roles} &= \{R_0, R_1, \dots, R_n\} \\
 \text{Conceptos} &= \{C_0, C_1, \dots\} \cup \{D_0, D_1, \dots\} \\
 \mathcal{C}_\mathcal{L} &= \text{Variable} : \times \text{Concepto} \\
 &\quad \text{Individuo} : \times \text{Concepto} \\
 \mathcal{R}_\mathcal{L} &= \text{Variable} \times \text{Variable} : \times \text{Rol} \\
 &\quad \text{Individuo} \times \text{Individuo} : \times \text{Rol} \\
 \varphi_\mathcal{L} &= \mathbb{P}(\text{Consulta}) \\
 \phi_{\varphi_\mathcal{L}}(x) &= \mathbb{P}(\text{Predicado}) \\
 \Sigma_\mathcal{L} &= \mathbb{P}(\text{Conceptos})
 \end{aligned}$$

Definición 1 (*Consulta*). Una Consulta es un Concepto Primitivo o un Concepto Complejo a partir del Lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición 2 (*Traducción*). Dada la semántica de los Lenguajes Conceptuales, entonces una Consulta $\varphi_\mathcal{L}$ se puede traducir a una Fórmula Lógica $\phi_{\varphi_\mathcal{L}}(\bar{x})$ la cual tiene al menos una variable libre (donde $\bar{x} \in \text{Variable}$)

Definición 3 (*Substitución*). Dada una tupla de variables $\rho = (\bar{x})$, una tupla de individuos $\tau = (\bar{a})$ y un dominio $\Delta^\mathcal{I}$, entonces una substitución μ es una función parcial, $\mu : \rho, \tau \rightarrow \Delta^\mathcal{I}$ la cual substituye ρ por τ

Definición 4 (*Satisfacción*). Dada una teoría axiomática $\Sigma_\mathcal{L}$, una consulta $\varphi_\mathcal{L}(\bar{x})$ y una tupla de individuos τ , tal que $\tau = (\bar{a}) \in \Delta^\mathcal{I}$, entonces $\varphi_\mathcal{L}[(x_1, \dots, x_k)]^{\mu, \tau} \models \varphi_\mathcal{L}(\bar{x})$ si y solo si $\varphi_\mathcal{L}(\tau) \subseteq \Sigma_\mathcal{L}$, donde:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= (x_1, \dots, x_k), x_i \in \text{Variables} \\
 \tau &= (a_1, \dots, a_k), a_i \in \Delta^\mathcal{I}, \forall i=1, \dots, k
 \end{aligned}$$

Definición 5 (*Interpretación*). Dada una consulta $\varphi_\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)$, entonces la interpretación $\varphi_\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)^\mathcal{I}$ de $\varphi_\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k)$ es el conjunto de k -tuplas, donde k es el número de variables distintas en $\varphi_\mathcal{L}(\bar{x})$:

$$\varphi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_k)^{\exists} = \{a_1, \dots, a_k \mid a_i \in \Delta^{\exists}, [\varphi_{\Sigma}(x_1, \dots, x_k)]^{\exists, \mu, \tau} = \text{True}\}$$

donde μ substituye x_i por $a_i, \forall i = 1 \dots k$.

Definición 6 (Solución). Dada una teoría axiomática Σ_{Σ} y una consulta $\varphi_{\Sigma}(\bar{x})$, entonces el conjunto solución $\Psi_{\Sigma}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(\bar{x}))$, está dada por:

$$\Psi_{\Sigma}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(\bar{x})) = \{(a_1, \dots, a_k) \mid [\varphi(x_1, \dots, x_k)]^{\mu, \tau} \models \varphi_{\Sigma}(\bar{x})\}$$

donde $\tau = (a_1, \dots, a_k)$.

Set de Conceptos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathcal{U}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \{ \langle x, a : C_{\Sigma} \rangle \mid \exists C_{\Sigma}, x : C_{\Sigma} \in \varphi_{\Sigma}, \langle a : C_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma} \} \end{aligned} \quad (1)$$

Set de Roles:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathcal{B}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \langle x_1, a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \\ \exists x_1, x_2, \langle x_1, x_2 : R_{\Sigma} \rangle \in \varphi_{\Sigma}(x), \\ \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}, x_1 \neq x_2 \end{array} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Definición 7 (Mapping). Dada una Teoría Axiomática $\Sigma_{\Sigma}(\mathfrak{T}, \mathfrak{A})$ y una consulta (concepto) $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x)$, entonces la operación Mapping está dado por:

$$\begin{aligned} \prod_{x: C_{\Sigma} \in S_{\Sigma}}(\Sigma_{\Sigma}, \phi_{\varphi_{\Sigma}}(x)) = \\ \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } S_{\Sigma} = \emptyset \\ \langle x, a : C_{\Sigma} \rangle \\ \text{si } S_{\Sigma} = \{ \langle x, a : C_{\Sigma} \rangle, \langle a : C_{\Sigma} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{U}\mathfrak{S}} \\ \langle x, a : C_{\Sigma} \rangle \cup \prod_{x: C_{\Sigma} \in S'_{\Sigma}}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(x)) \\ \text{si } S_{\Sigma} = \{ \langle x, a : C_{\Sigma} \rangle \} \cup S'_{\Sigma}, \langle a : C_{\Sigma} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{U}\mathfrak{S}} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \prod_{x_1, x_2: R_{\Sigma} \in S_{\Sigma}}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(x)) = \\ \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ si } S_{\Sigma} = \emptyset \\ \langle x_1, a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \\ \text{si } S_{\Sigma} = \{ \langle x_1, x_2 : R_{\Sigma} \rangle \}, \\ \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{B}\mathfrak{S}} \\ \langle x_1, a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \cup \prod_{x_1, x_2: R_{\Sigma} \in S'_{\Sigma}} \\ \text{si } S_{\Sigma} = \{ \langle x_1, x_2 : R_{\Sigma} \rangle \} \cup S'_{\Sigma}, \\ \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{B}\mathfrak{S}} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

A. Procesando Conceptos

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{U}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \bigcap_{C_{\Sigma} \in \varphi_{\Sigma}(x)} \mathfrak{S}_{C_{\Sigma}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{C_{\Sigma} \in \varphi_{\Sigma}(x)} \mathfrak{S}_{C_{\Sigma}} = \\ \left\{ \left\langle \begin{array}{l} x_k : C_{\Sigma_k}, \mathfrak{S}_{k_1} \cap \dots \cap \mathfrak{S}_{k_n} \\ x_k : C_{\Sigma_k}, \mathfrak{S}_{k_i} \in \mathcal{U}\mathfrak{S}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ \forall i=1 \dots n \end{array} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ a \mid \begin{array}{l} \exists \langle x_k : C_{\Sigma_k}, \bigcap_{i=1}^n S_{k_i} \rangle, \\ \langle x_k : C_{\Sigma_k}, S_k \rangle \in \mathcal{J}\mathcal{U}\mathfrak{S}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}), \\ a \in S_k \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

B. Procesando Roles

$$\begin{aligned} \pi_{x_1}^{\mathfrak{R}_{\Sigma_1}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ \left\langle \begin{array}{l} x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, a_{k_{i_q}}, \{a_{k_i}, \dots, a_{k_{i_t}}\} \\ x_k, a_{k_{i_q}}, a_{k_{i_p}} : R_{\Sigma_{k_i}} \\ \in \prod_{x_k, x_l: R_{\Sigma} \in S_{\Sigma}}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(x)) \\ \forall p=1 \dots t \end{array} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{J}\mathcal{B}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \bigcap_{\mathfrak{R}_{\Sigma_1} \in \varphi_{\Sigma}(x)} \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_{\Sigma_1}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{\mathfrak{R}_{\Sigma_1} \in \varphi_{\Sigma}(x)} \mathfrak{S}_{\mathfrak{R}_{\Sigma_1}} = \\ \left\{ \left\langle \begin{array}{l} x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, \mathfrak{S}_{k_i} \cap \dots \cap \mathfrak{S}_{k_n}, \{a_{k_{i_1}}, \dots, a_{k_{i_t}}\} \\ \exists a_{k_{i_q}}, a_{k_{i_p}} \in \mathfrak{S}_{k_i}, \\ x_k, a_{k_{i_q}}, a_{k_{i_p}} : R_{\Sigma_{k_i}} \\ \in \prod_{x_k, x_l: R_{\Sigma} \in S_{\Sigma}}(\Sigma_{\Sigma}, \varphi_{\Sigma}(x)) \\ \exists x_l, \langle x_k, x_l : R_{\Sigma_{k_i}} \rangle \in \varphi_{\Sigma}(x), \\ \forall p=1 \dots t \end{array} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathfrak{R}_{\Sigma_1}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ a_1 \mid \begin{array}{l} \exists x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, \bigcap_{i=1}^n S_{k_i}, \{a_{k_{i_1}}, \dots, a_{k_{i_t}}\} \\ \langle x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, \mathfrak{S}_{k_n}, \{a_{k_{i_1}}, \dots, a_{k_{i_t}}\} \rangle \\ \in \mathfrak{S}_{\mathcal{J}\mathcal{B}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ a_1 \in S_{k_i} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_{x_2}^{\mathfrak{R}_{\Sigma_2}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ a_2 \mid \begin{array}{l} \exists \langle x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, S_{k_n}, S_{k_m} \rangle, \\ \langle x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, \mathfrak{S}_{k_n}, \mathfrak{S}_{k_m} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{J}\mathcal{B}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ a_2 \in \mathfrak{S}_{k_m} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\bigcap}_{x_1}^{\mathcal{C}_{\Sigma}, \mathfrak{R}_{\Sigma}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) = \\ \left\{ a_1 \mid \begin{array}{l} \exists \langle x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, S_{k_n}, S_{k_m} \rangle, \\ \langle x_k, R_{\Sigma_{k_i}}, \mathfrak{S}_{k_n}, \mathfrak{S}_{k_m} \rangle \in \mathfrak{S}_{\mathcal{J}\mathcal{B}\mathfrak{S}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ a_2 \in \mathfrak{S}_{k_m} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\widehat{\bigcap}_{x_2}^{\mathcal{C}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma} (\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) = \left\{ a_2 \left| \begin{array}{l} \exists \langle x_2, a_2 : C_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \exists \langle x_2, a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ a_2 \in \widehat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \cap \widehat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \end{array} \right. \right\} \quad (14)$$

Definición 8 (Set de Soluciones). Dada un teoría axiomática Σ_Σ y un consulta $\varphi_\Sigma(x)$, entonces el set solución, $\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$, para $\varphi_\Sigma(x)$ es el set de individuos que satisfacen $\varphi_\Sigma(x)$ i.e., $\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) = \{a \mid a \models \varphi_\Sigma(x)\}$. Por lo tanto, dada un teoría axiomática Σ_Σ y un consulta $\varphi_\Sigma(x)$, entonces $\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ está dado por los subconjuntos solución $\pi_x^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$, $\widehat{\pi}_x^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$, $\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$, $\widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ $\widehat{\bigcap}_{x_2}^{\mathcal{C}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$.

IV. PRUEBA DE COMPLETITUD (COMPLETENESS) DE $\mathcal{CTQ}$

En la presente sección se formaliza y comprueba la propiedad de Completeness del Calculus Tableaux $\mathcal{CTQ}$.

Lema IV.1 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a : C_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\varphi'_\Sigma(x) = \emptyset$, entonces

$$\langle x, a : C_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \Sigma_\Sigma = \langle x, a : C_\Sigma \rangle$$

Lo anterior procede directamente de las ecuaciones (1) y (3).

Lema IV.2 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C'_\Sigma}(x) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a \in \{a : C_\Sigma, a : C'\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a \in \widehat{\pi}_x^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Dado que $\{a : C, a : C'\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces de las ecuaciones (1) y (3) se infiere que $\langle x, a : C_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{C_\Sigma}$ y $\langle x, a : C'_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{C'_\Sigma}$. Posteriormente de la ecuación (6) es posible verificar que

$$\langle x, C_\Sigma, \{a\} \rangle \in \pi_x^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle x, C'_\Sigma, \{a\} \rangle \in \pi_x^{\mathcal{C}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (8) se infiere que $\langle x, C_\Sigma, \{a\} \cap \{a\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (9) se puede constatar que

$$a \in \widehat{\pi}_x^{\mathcal{C}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema IV.3 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\varphi'_\Sigma(x) = \emptyset$, entonces

$$\langle x_1, a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \Sigma_\Sigma = \langle x_1, a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle$$

Lo anterior se infiere directamente de las ecuaciones (2) y (5) donde $\{x_1, x_2\} \in \text{Variable}$ y $\{a_1, a_2\} \in \text{Individual}$.

Lema IV.4 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_1, x_3) \in \varphi'_\Sigma(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a_1 \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_1, a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ y $\langle x_1, a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ tal que

$$\langle x_1, R_\Sigma, \{a_1\}, \{a_2\} \rangle \in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle x_1, R'_\Sigma, \{a_1\}, \{a_3\} \rangle \in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle x_1, R_\Sigma, a_1, \{a_2, a_3\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (13) que

$$a_1 \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema IV.5 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_2, x_3) \in \varphi'_\Sigma(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_2, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a_2 \in \widehat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle, \langle a_2, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_2, a_2, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ tal que

$$\langle x_2, R'_\Sigma, \{a_2\}, \{a_3\} \rangle \in \pi_{x_2}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle x_2, R_\Sigma, a_2, \{a_3\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (14) que

$$a_2 \in \widehat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema IV.6 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x_1) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_1 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a_1 \in \widehat{\bigcap}_{x_1}^{\mathcal{C}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

La prueba procede directamente de los Lemas 1, 2 y 4.

Lema IV.7 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C_\Sigma}(x_2) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_2 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a_2 \in \bigcap_{x_2}^{\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma} (\varphi_\Sigma(x_2), \Sigma_\Sigma)$$

Prueba: La prueba procede directamente de los Lemas 1, 2 y 5.

V. TEOREMA 1 (COMPLETENESS)

Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{\varphi_\Sigma}(x) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$, una teoría axiomática Σ_Σ y el frakculus tableau $\mathcal{E}\Sigma_\Sigma$, entonces $\mathcal{E}\Sigma_\Sigma$ construye un modelo para Σ_Σ , luego entonces

$$\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Caso V.1 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a : C_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\phi'_{\varphi_\Sigma}(x) = \emptyset$, entonces

$$\pi_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Caso V.2 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C'_\Sigma}(x) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a \in \{a : C_\Sigma, a : C'\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\widehat{\pi}_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Dado que $\{a : C, a : C'\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces de las ecuaciones (1) y (3) se infiere que $\langle x, a : C_\Sigma \rangle \in S_{C_\Sigma}$ y $\langle x, a : C'_\Sigma \rangle \in S_{C'_\Sigma}$. Posteriormente de la ecuación (6) es posible verificar que

$$\begin{aligned} \langle x, C_\Sigma, \{a\} \rangle &\in \pi_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ \{a\} &\in \phi_{\varphi_\Sigma}(x) \\ \langle x, C'_\Sigma, \{a\} \rangle &\in \pi_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ \{a\} &\in \phi_{\varphi'_\Sigma}(x) \end{aligned}$$

$$\text{y por lo tanto, } \pi_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Finalmente, de la ecuación (8) se infiere que $\langle x, C_\Sigma, \{a\} \cap \{a\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (9) se puede constatar que

$$\begin{aligned} a &\in \widehat{\pi}_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ a &\in \phi_{\varphi'_\Sigma}(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $\widehat{\pi}_x^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$

Caso V.3 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\phi'_{\varphi_\Sigma}(x) = \emptyset$, entonces

$$\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Lo anterior se infiere directamente de las ecuaciones (2) y (5) donde $\{x_1, x_2\} \in \text{Variable}$ y $\{a_1, a_2\} \in \text{Individual}$.

Caso V.4 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_1, x_3) \in \phi'_{\varphi_\Sigma}(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_1, a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle \in S_{\mathcal{R}'_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma)$ y $\langle x_1, a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in S_{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma)$ tal que

$$\begin{aligned} \langle x_1, R_\Sigma, \{a_1\}, \{a_2\} \rangle &\in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle &\in \phi_{\varphi_\Sigma}(x) \\ \langle x_1, R'_\Sigma, \{a_1\}, \{a_3\} \rangle &\in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \rangle &\in \phi_{\varphi'_\Sigma}(x) \end{aligned}$$

$$\text{y por lo tanto, } \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle x_1, R_\Sigma, a_1, \{a_2, a_3\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (13) que

$$\begin{aligned} a_1 &\in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \\ a_1 &\in \phi_{\varphi'_\Sigma}(x) \end{aligned}$$

$$\text{y por lo tanto, } \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Caso V.5 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_2, x_3) \in \phi'_{\varphi_\Sigma}(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_2, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\widehat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Procede directamente del Caso 4.

Caso V.6 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{C_\Sigma}(x_1) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) \in \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_1 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\widehat{\bigcap}_{x_1}^{\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\phi_{\varphi_\Sigma}(x), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Procede directamente de los Casos 1, 2 y 4.

Caso V.7 Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C_\Sigma}(x_2) \in \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_2 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\widehat{\bigcap}_{x_2}^{\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x_2), \Sigma_\Sigma) \models \phi_{\varphi_\Sigma}(x)$$

Procede directamente de los Casos 1, 2 y 5.

VI. PRUEBA DE CORRECTITUD (SOUNDNESS) DE $\mathcal{E}\Sigma_\Sigma$

En la presente sección se formaliza y comprueba la propiedad de Soundness del Calculus Tableaux $\mathcal{CT}_\Sigma$.

Lema VI.1 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a : C_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\varphi'_\Sigma(x) = \emptyset$, entonces

$$\langle a : C_\Sigma \rangle \in S_{\Sigma \in}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ S_\Sigma = \langle a : C_\Sigma \rangle$$

Lo anterior procede directamente de las ecuaciones (1) y (3).

Lema VI.2 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C'_\Sigma}(x) \in \varphi'_\Sigma(x)$, $\exists a \in \{a : C_\Sigma, a : C'_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\{\langle a : C_\Sigma \rangle, \langle a : C'_\Sigma \rangle\} \in \widehat{\pi}_{x_\Sigma}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Dado que $\{a : C_\Sigma, a : C'_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces de las ecuaciones (1) y (3) se infiere que $\langle a : C_\Sigma \rangle \in S_{C_\Sigma}$ y $\langle a : C'_\Sigma \rangle \in S_{C'_\Sigma}$. Posteriormente de la ecuación (6) es posible verificar que

$$\langle a : C_\Sigma \rangle \in \pi_{x_\Sigma}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a : C'_\Sigma \rangle \in \pi_{x_\Sigma}^{\mathcal{E}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (8) se infiere que $\langle C_\Sigma, \{a\} \cap \{a\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (9) se puede constatar que

$$\langle a : C_\Sigma \rangle \in \widehat{\pi}_{x_\Sigma}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a : C'_\Sigma \rangle \in \widehat{\pi}_{x_\Sigma}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema VI.3 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, donde $\varphi'_\Sigma(x) = \emptyset$, entonces

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in S_{\Sigma \in}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ S_\Sigma = \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle$$

Lo anterior se infiere directamente de las ecuaciones (2) y (5) donde $\{x_1, x_2\} \in \text{Variable}$ y $\{a_1, a_2\} \in \text{Individual}$.

Lema VI.4 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_1, x_3) \in \varphi'_\Sigma(x)$, $\exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$a_1 \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle, \langle a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_1, a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in S_{\Sigma \in}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ y $\langle x_1, a_1, a_3 : R_\Sigma \rangle \in S_{\Sigma \in}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ tal que

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle x_1, R_\Sigma, a_1, \{a_2, a_3\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (13) que

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_1, a_3 : R'_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema VI.5 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_\Sigma}(x_2, x_3) \in \varphi'_\Sigma(x)$, $\exists \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle, \langle a_2, a_3 : R'_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_\Sigma}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_2, a_3 : R'_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Prueba:. Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_\Sigma \rangle, \langle a_2, a_3 : R_\Sigma \rangle \in \Sigma_\Sigma$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_2, a_2, a_3 : R_\Sigma \rangle \in S_{\Sigma \in}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$ tal que

$$\langle x_2, R'_\Sigma, \{a_2\}, \{a_3\} \rangle \in \pi_{x_2}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle x_2, R_\Sigma, a_2, \{a_3\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (14) que

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_2, a_3 : R'_\Sigma \in \widehat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}'_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

Lema VI.6 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{C_\Sigma}(x_1) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_1 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\langle a_1 : C_\Sigma \rangle \in \widehat{\bigcap}_{x_1}^{\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \widehat{\bigcap}_{x_1}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

La prueba procede directamente de los Lemas 1, 2 y 4.

Lema VI.7 Dada una consulta $\varphi_\Sigma(x) = \phi_{R_\Sigma}(x_1, x_2) + \varphi'_\Sigma(x)$ y una teoría axiomática Σ_Σ tal que $\exists \phi_{C_\Sigma}(x_2) \in \varphi'_\Sigma(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_2 : C_\Sigma, a_1, a_2 : R_\Sigma\} \in \Sigma_\Sigma$, entonces

$$\langle a_1, a_2 : R_\Sigma \rangle \in \widehat{\bigcap}_{x_2}^{\mathcal{E}_\Sigma, \mathcal{R}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \\ \langle a_2 : C_\Sigma \rangle \in \widehat{\bigcap}_{x_2}^{\mathcal{E}_\Sigma}(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma)$$

La prueba procede directamente de los Lemas 1, 2 y 5.

VII. TEOREMA 2 (SOUNDNESS)

Dada una consulta $\phi_{\varphi_\Sigma}(x) = \phi_{\varphi_\Sigma}(x) + \phi'_{\varphi_\Sigma}(x)$, una teoría axiomática Σ_Σ y el calculus tableau $\mathcal{CT}_\Sigma$, entonces

$$\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \subseteq \Sigma_\Sigma$$

Por contradicción:. Asumamos que $\Psi(\varphi_\Sigma(x), \Sigma_\Sigma) \not\subseteq \Sigma_\Sigma$

Caso VII.1 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{C_{\Sigma}}(x) + \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists \langle a : C_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}$, donde $\phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x) = \emptyset$, entonces

$$\pi_x^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Lo anterior procede directamente de las ecuaciones (1) y (3).

Caso VII.2 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{C_{\Sigma}}(x) + \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists \phi_{C'_{\Sigma}}(x) \in \varphi'_{\Sigma}(x)$ y $\exists a, \{a : C_{\Sigma}, a : C'_{\Sigma}\} \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces

$$\pi_x^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Dado que $\{a : C, a : C'\} \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces de las ecuaciones (1) y (3) se infiere que $\langle a : C_{\Sigma} \rangle \in S_{C_{\Sigma}}$ y $\langle a : C'_{\Sigma} \rangle \in S_{C'_{\Sigma}}$. Posteriormente de la ecuación (1.6) es posible verificar que

$$\begin{aligned} \langle x, C_{\Sigma}, \{a\} \rangle &\subseteq \Sigma_{\Sigma} \\ \langle x, C'_{\Sigma}, \{a\} \rangle &\subseteq \Sigma_{\Sigma} \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\pi_x^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Finalmente, de la ecuación (8) se infiere que $\langle x, C_{\Sigma}, \{a\} \cap \{a\} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (9) se puede constatar que

$$\langle a : C_{\Sigma} \rangle \subseteq \pi_x^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma})$$

y por lo tanto,

$$\pi_x^{\mathcal{C}_{\Sigma}}(\varphi_{\Sigma}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Caso VII.3 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{R_{\Sigma}}(x_1, x_2) + \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}$, donde $\phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x) = \emptyset$, entonces

$$\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Lo anterior se infiere directamente de las ecuaciones (1.2) y (1.5) donde $\{x_1, x_2\} \in \text{Variable}$ y $\{a_1, a_2\} \in \text{Indivdual}$.

Caso VII.4 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{R_{\Sigma}}(x_1, x_2) + \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_{\Sigma}}(x_1, x_3) \in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle, \langle a_1, a_3 : R'_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces

$$\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Dado que $\exists \langle a_1, a_2 : R'_{\Sigma} \rangle, \langle a_1, a_3 : R_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}$ entonces del Lema 3, se puede inferir que $\langle x_1, a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle \in$

$S_{\Sigma} \subseteq (\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma})$ y $\langle a_1, a_3 : R_{\Sigma} \rangle \in S_{\Sigma} \subseteq (\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma})$ tal que

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle &\in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle &\in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x) \\ \langle a_1, a_3 : R'_{\Sigma} \rangle &\in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ \langle a_1, a_3 : R_{\Sigma} \rangle &\in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Finalmente, de la ecuación (12) se infiere que $\langle a_1, \{a_2, a_3\} : R_{\Sigma} \rangle$ y por lo tanto de la ecuación (13) que

$$\begin{aligned} \langle a_1, \{a_2, a_3\} : R_{\Sigma} \rangle &\in \pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \\ \langle a_1, \{a_2, a_3\} : R_{\Sigma} \rangle &\in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x) \end{aligned}$$

Y por lo tanto,

$$\pi_{x_1}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Caso VII.5 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{R_{\Sigma}}(x_1, x_2) + \phi'_{\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists x_3, \exists a_3, \exists \phi_{R'_{\Sigma}}(x_2, x_3) \in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x), \exists \langle a_1, a_2 : R_{\Sigma} \rangle, \langle a_2, a_3 : R'_{\Sigma} \rangle \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces

$$\pi_{x_2}^{\mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Procede directamente del Caso 4.

Caso VII.6 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{C_{\Sigma}}(x_1) + \phi'_{\Sigma}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists \phi_{R_{\Sigma}}(x_1, x_2) \in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_1 : C_{\Sigma}, a_1, a_2 : R_{\Sigma}\} \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces

$$\bigcap_{x_1}^{\mathcal{C}_{\Sigma}, \mathcal{R}_{\Sigma}}(\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Procede directamente de los Casos 1, 2 y 4.

Caso VII.7 Dada una consulta $\phi_{\varphi_{\Sigma}}(x) = \phi_{R_{\Sigma}}(x_1, x_2) + \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y una teoría axiomática Σ_{Σ} tal que $\exists \phi_{C_{\Sigma}}(x_2) \in \phi_{\varphi'_{\Sigma}}(x)$ y $\exists a_1, a_2, \{a_2 : C_{\Sigma}, a_1, a_2 : R_{\Sigma}\} \in \Sigma_{\Sigma}$, entonces

$$\bigcap_{x_2}^{\mathcal{C}_{\Sigma}, \mathcal{R}_{\Sigma}}(\varphi_{\Sigma}(x_2), \Sigma_{\Sigma}) \subseteq \Sigma_{\Sigma}$$

Procede directamente de los Casos 1, 2 y 5.

VIII. CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS AXIOMÁTICAS Σ_{Σ}

El proceso de construcción de una teoría axiomática, Σ_{Σ} , a partir de $\mathcal{U}$, consiste en definir tanto el conocimiento intensional, $\Sigma_{\Sigma, TBox}$ (i.e. $TBox$) como extensional $\Sigma_{\Sigma, ABox}$ (i.e. $ABox$) de un dominio, Δ^3 , en particular. En este estricto contexto, el componente $TBox$ consiste, pues, en un conjunto de axiomas que representan una jerarquía (i.e. taxonomía) entre los conceptos y roles del dominio. En contraste, el componente $ABox$ consiste en un conjunto de aserciones sobre individuos -en concreto- que satisfacen los axiomas definidos en la $TBox$. EL Calculus Tableau, $\mathcal{CT}_{\Sigma}$, puede realizar tanto

transacciones (i.e. consultas) como procesos de inferencia sobre uno de estos componentes en particular o sobre ambos.

A. Ejemplo

Dada la siguiente teoría axiomática, $\Sigma_{\mathcal{L}}$, conformada por las siguientes TBox y ABox:

$$\Sigma_{\mathcal{L}, TBox} = \left\{ \begin{array}{l} \text{EspecialistaDisponible} \sqsubseteq \text{Especialista} \sqcap \\ \exists \text{realiza.Guardia} \\ \text{MédicoInternistaDisponible} \sqsubseteq \text{Médico} \sqcap \\ \text{Internista} \sqcap \exists \text{realiza.Guardia} \\ \text{HelicópteroDisponible} \sqsubseteq \text{Helicóptero} \sqcap \\ \forall \text{situadoEn.Helipuerto} \\ \text{RequiereIntervención} \sqsubseteq \text{Paciente} \sqcap \\ \exists_{\geq 3} \text{ tiene. (SintomaVital} \sqcap \text{IncompatibleVida)} \\ \text{RequiereAsistencia} \sqsubseteq \text{Paciente} \sqcap \\ \exists_{\geq 2} \text{ tiene. (SignoVital} \sqcap \text{Anormal)} \\ \text{QuirófanoDisponible} \doteq \text{Quirófano} \sqcap \text{Disponible} \end{array} \right.$$

$$\Sigma_{\mathcal{L}, ABox} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 : \text{Especialista} \sqcap \text{PatólogoClínico} \\ a_2 : \text{Especialista} \sqcap \text{Cirujano} \\ a_3 : \text{Médico} \sqcap \text{Internista} \sqcap \\ \exists \text{realiza}\{a_4\}.\text{Guardia} \\ a_5 : \text{Helicóptero} \sqcap \forall \text{situadoEn} \{a_6\}.\text{Helipuerto} \\ a_7 : \text{Quirófano} \sqcap \text{Disponible} \end{array} \right.$$

Asumamos, pues, un escenario de contingencia (i.e. un accidente), en el cual derivado de los datos que proporciona un sistema embebido, asociado al conductor, se establece que dada el área geográfica, se requiere de apoyo aéreo por parte de la unidad de emergencias, lo cual en el presente sistema axiomático se traduce a comprobar la satisfacibilidad del concepto primitivo *HelicópteroDisponible*, esto es:

$$\varphi_{\mathcal{L}} = \phi_{\text{HelicópteroDisponible}}^{\text{HelicópteroDisponible}}$$

A partir del Calculus Tableaux $\mathcal{CT}_{\mathcal{L}}$ a $\Sigma_{\mathcal{L}, TBox}$, $\Sigma_{\mathcal{L}, ABox}$ y $\varphi_{\mathcal{L}}$, se alcanza los siguientes conjuntos solución:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{x_1}^{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{R}_{\mathcal{L}}} (\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}}) = \\ \{a_5 \mid \dots a_5 \in \hat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}(\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}}) \cap \hat{\pi}_{x_1}^{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}}(\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}})\} \\ \bigwedge_{x_2}^{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{R}_{\mathcal{L}}} (\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}}) = \\ \{a_6 \mid \dots a_6 \in \hat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{C}_{\mathcal{L}}}(\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}}) \cap \hat{\pi}_{x_2}^{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}}(\varphi_{\mathcal{L}}(x), \Sigma_{\mathcal{L}})\} \end{aligned}$$

Por motivos de espacio, sólo se presentan los conjuntos solución y la construcción de la misma a partir de su definición formal:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{L}}(\Sigma_{\mathcal{L}}, \varphi_{\mathcal{L}}(\bar{x})) = \{(a_5, a_6) \mid [\varphi(x_1, x_2)]^{\mu, \tau} \models \varphi_{\mathcal{L}}(\bar{x})\} \\ \text{donde } \tau = (a_5, a_6), \quad x_1 \mapsto a_5, x_2 \mapsto a_6 \end{aligned}$$

De lo cual se infiere que aplicando $\mathcal{CT}_{\mathcal{L}}$ a $\varphi_{\mathcal{L}}$, $\Sigma_{\mathcal{L}, TBox}$ y $\Sigma_{\mathcal{L}, ABox}$, entonces se satisface $\varphi_{\mathcal{L}}$.

IX. CONCLUSIÓN

En el presente artículo, se ha formalizado el Lenguaje Conceptual $\mathcal{L}$ con el objeto de construir, paulatinamente, un Enfoque Ontológico para mejorar la etapa de Feature Engineering en tareas que subyacen en el ámbito del Aprendizaje de Máquina. Asimismo se ha construido un Calculus Tableaux $\mathcal{CT}_{\mathcal{L}}$ para soportar servicios transaccionales y de razonamiento sobre teorías axiomáticas basadas en el lenguaje conceptual $\mathcal{L}$. Más aún, se han construido las pruebas de las propiedades de completeness y soundness de $\mathcal{CT}_{\mathcal{L}}$; demostrando, formalmente, que cumple con las mismas.

Finalmente, como trabajo futuro, se contemplan varias tareas tales como: el estudio de la complejidad de $\mathcal{CT}_{\mathcal{L}}$ y la construcción de teorías axiomáticas, basadas en $\mathcal{L}$, que permitan extender los actuales enfoques -predominantemente probabilísticos y numéricos- del Feature Engineering hacia un enfoque ontológico que, en última instancia, abone en la disminución del error y el incremento de la confiabilidad de tareas que subyacen en el aprendizaje de máquina, tales como: regresión y/o clasificación.

REFERENCIAS

- [1] F. Baader and U. Sattler, "Tableau algorithms for description logics In R. Dychko, editor, Automated Reasoning with Tableaux and Related Methods," *Proceedings of Tableaux'2000, LNAI(1847)*, pp. 1-18, 2000. DOI: https://doi.org/10.1007/10722086_1.
- [2] F. Wolter, F. Baader, and R. Kusters. *Extensions to description logics*. Technifrak Report, 2000.
- [3] M. Buchheit, F. M. Donini, and A. Schaerf, "Decidable reasoning in terminologifrak knowledge representation systems," *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI(93)*, pp. 704-709, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1613/jair.21>.
- [4] F. M. Donini, M. Lenzerini, D. Nardi, A. Schaerf, "Deduction in concept languages: From subsumption to instance checking," *Journal of Logic and Computation*, vol. 4, no. 4, pp. 423-452, 1994.
- [5] B. Hollunder, W. Nutt, "Subsumption algorithms for concept languages," Research report RR-90-04, German Research Center for Artificial Intelligence (DFKI), pages 348-353, 1990. DOI: <https://dx.doi.org/10.22028/D291-24810>.
- [6] I. Horrocks, U. Sattler, "Ontology reasoning in the SHOQ(D) description logic," *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2001.
- [7] A. Naumenko, A. Wegmann, and C. Atkinson, *The Role of Tarski's Declarative Semantics in the Design of Modeling Languages*, 2003.
- [8] J. Skene "Description logic as programming language," *Proceedings of the 2014 ACM International Symposium on New Ideas, New Paradigms, and Reflections on Programming & Software*, pp. 143-162, 2014.
- [9] F. Grandi, "On Expressive Number Restrictions in Description Logics," *Description Logics*, 2001.

- [10] M. Grüninger, and M. S. Fox, "Ontologies and the Semantic Web for Systems Engineering," *International Journal on Software and Systems Modeling*, 2023.
- [11] R. Cornet, and N. de Keizer, "A comprehensive survey on ontologies for clinical decision support systems," *Journal of Biomedical Informatics*, 2022.
- [12] M. Tenorth and M. Beetz, "KnowRob: Knowledge processing for autonomous robots," *Journal of Robotics Research*, 2013.
- [13] J. Hastings, et al. "The ChEBI ontology: A tool for accessing and reasoning about chemical entities," *Bioinformatics*, 2023.
- [14] V. Gutiérrez Basulto, S. Schlobach, "Integrating ontologies with machine learning models for enhanced feature engineering in healthcare applications," *Journal of Biomedical Semantics*, vol. 14, no. 1, pp. 12-25, 2023.
- [15] D. Malerba, M. Ceci, and A. Appice, "Ontology-driven feature engineering for temporal data mining in financial markets," *Data Mining and Knowledge Discovery*, vol. 36, no. 4, pp. 1283-1302, 2022.
- [16] S. Lukichev and A. Bozzon, "Combining ontologies and deep learning for feature engineering in natural language processing," *Proceedings of the 27th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems (KES)*, pp. 23-31, 2023.
- [17] H. Kaur and K. S. Mann, "Ontology-Based Feature Selection for Improved Regression in Predictive Analytics," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 45678-45688, 2023.
- [18] L. García, R. Martín, and J. Prieto, "Ontology-Enhanced Machine Learning for Regression in Healthcare Analytics," *Computers in Biology and Medicine*, pp. 145, 2022.
- [19] A. Johnson and P. Thompson, "Improving Classification Accuracy Using Ontology-Based Data Preprocessing," *Machine Learning. Expert Systems with Applications*, 203, 2022.
- [20] F. Baader and C. Lutz, "Description Logic EL: Basics, Extensions, and Applications," *Theoretical Computer Science*, vol. 300, no. 1-3, pp. 3-23, 2003.
- [21] F. Baader, S. Brandt, and C. Lutz, "Pushing the EL Envelope," *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pp. 364-369, 2005. DOI: <https://doi.org/10.25368/2022.144>.
- [22] S. Brandt, "Polynomial Time Reasoning in a Description Logic with Existential Restrictions, GCI Axioms, and - What Else?," *Proceedings of the 16th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, pp. 298-302, 2004.